

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记15——微积分第二基本定理

微积分第二基本定理

如果 f 是连续的，并且， $G(x) = \int_a^x f(t)dt, (a \leq t \leq x)$,

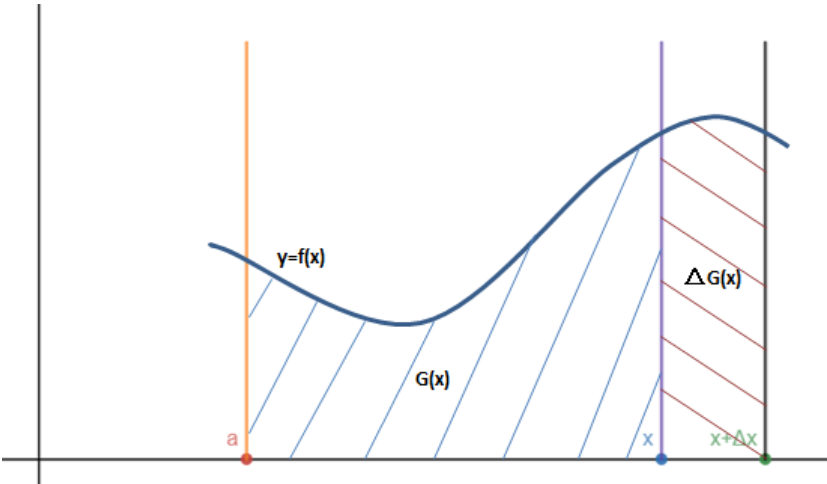
那么 $G'(x) = f(x)$

也可以写作 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$

这里需要注意 t 与 x 的关系，它的意思是一个函数能够找到相应的积分方式去表达。如果 $F' = f$ ，则：

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt = F(t)|_{t=a}^{t=x}$$

下面是第二基本定理的证明。



证明需要采用画图法，如上图所示，曲线是 $y=f(x)$ ，两个阴影部分的面积分别是 $G(x)$ 和 $\Delta G(x)$ ，其中：

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

当 Δx 足够小时：

$$\Delta G(x) \approx \Delta x f(x)$$

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta x} = f(x)$$

示例1

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析（一）(29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型（一）(8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好”（2）——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集（一）——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2（点积）(6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集（二）——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型（一）(5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2（点积）
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫猫大人

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{t^2} = ?$$

根据微积分第二基本定理：

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x), \quad f(t) = \frac{1}{t^2}, f(x) = \frac{1}{x^2}$$

下面做一下验证：

$$\int_1^x \frac{dt}{t^2} = \left. \frac{-1}{t} \right|_{t=1}^{t=x} = 1 - \frac{1}{x}$$
$$\frac{d}{dx} \int_1^x \frac{dt}{t^2} = \frac{d}{dx} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x^2}$$

示例2

解微分方程， $L'(x) = 1/x; L(1) = 0$

按照以往的求解方式：

$$L(x) = \int \frac{1}{x} = \ln(x) + C$$
$$L(1) = \ln(1) + C = 0 \Rightarrow C = 0$$
$$L(x) = \ln(x)$$

现在根据微积分第二基本定理，可以直接写作：

$$L(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

这种表达式其实是比过去的对数形式更有效的一种表达。

第二基本定理的链式法则

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos t dt = ?$$

由于积分上界是 x^2 ，所以不符合标准的第二基本定理，求解这类问题的一般步骤是使用链式法则求解。

$$u = x^2, \quad F(u) = \int_0^u \cos t dt$$
$$\frac{d}{dx} \int_0^u \cos t dt = F'(u) = \cos u$$

利用链式法则：

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \cos t dt = \frac{dF(x^2)}{dx} = F'(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cos x^2$$

这种求解方法具有通用性，积分上界是任何函数都可以用该方法求解。

超越函数

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

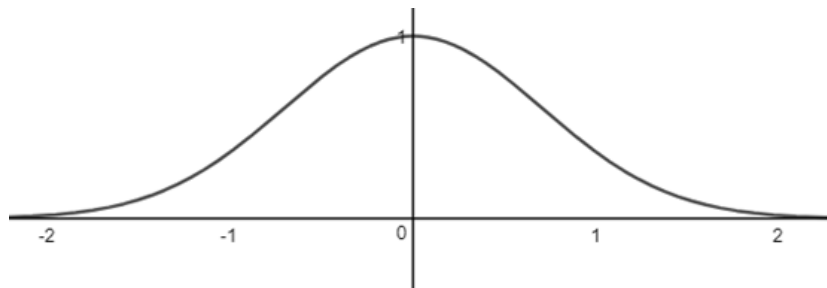
--trustInU

微积分第二基本定理可以得出很多新函数。下面是一个例子：

$$y' = e^{-x^2}, y(0) = 0$$

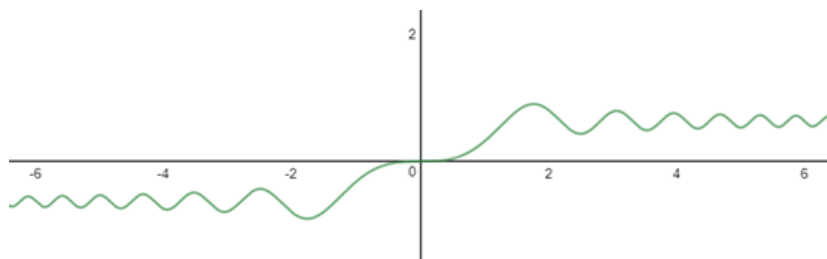
$$y = f(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$$

e^{-x^2} 就是著名的高斯函数。



$f(x)$ 表示 $x \geq 0$ 时，曲线与x轴的面积， $f(x)$ 就是一个超越函数。超越函数最有趣的地方是，它不能用过去的任何代数函数表示出来，包括对数、指数、三角函数等，只有用微积分才能有效地表达。下图就是一个超越函数

$f(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$ 的曲线：



综合示例

示例1

$$\int_0^x f(t) dt = x^2 \sin(\pi x), \quad f(2) = ?$$

根据第二基本定理，

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt \\ &= \frac{d}{dx} x^2 \sin(\pi x) \\ &= (x^2)' \sin(\pi x) + x^2 \sin(\pi x)' \\ &= 2x \sin(\pi x) + x^2 \pi \cos(\pi x) \\ f(2) &= 2 \times 2 \sin(2\pi) + 2^2 \pi \cos(2\pi) = 4\pi \end{aligned}$$

示例2

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$,用 f 表示 $F(x)$ 在 $x=0$ 处的二阶近似

首先来看二阶近似的定义（关于近似和二阶近似可参考[数学笔记6——线性近似和二阶近似](#)）：

当 $x \approx x_0 = 0$ 时

$$F(x) \approx F'(0)(x) + F(0) + F''(0)x^2/2$$

对于本例：

$$F(0) = \int_0^0 f(t)dt = 0$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$F'(0) = f(0)$$

$$F''(0) = f'(0)$$

$$\begin{aligned} F(x) &\approx F'(0)(x) + F(0) + F''(0)x^2/2 \\ &= f(0)(x) + 0 + f'(0)x^2/2 \end{aligned}$$

前提条件是 f 在 0 附近是可微的。

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [微积分第二基本定理](#), [超越函数](#)

好文要顶

关注我

收藏该文



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

[+加关注](#)

0

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记14——微积分第一基本定理](#)

» 下一篇: [概率笔记1——独立事件下的简单概率](#)

posted on 2017-10-31 22:44 我是8位的 阅读(6141) 评论(0) 编辑 收藏 举报

 登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) 博客园首页

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事

【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

yo zodcs.com

永中DCS_文档在线预览解决方案

兼容不同版本的Office、PDF等，特定格式的合作，支持Windows、信创环境下一键部署

打开 >

编辑推荐：

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

活动时间：2022年3月6日~3月18日



最新新闻：

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes